2.13) a) $T^2 = 0$ pero $T \neq 0$.

es decir

$T(T(v)) = 0$ pero $T(v) \neq 0$

Veo que $T(v)$ tiene que pertenecer a $Nu(T)$

o sea que $Im(T) \subseteq Nu(T)$

Como el dominio es $\mathbb{R}^3$, puedo pedir que:

- $\dim(Im(T)) = 1$ } para que se cumpla el teorema de
- $\dim(Nu(T)) = 2$ } la dimensión.

Entonces podría tomar que (arbitrariamente):

$$\begin{cases} T(1,0,0) = (1,1,1) \\ T(1,1,1) = (0,0,0) \\ T(0,0,1) = (0,0,0) \end{cases}$$

que cumple todo lo dicho.

donde $B = \{(1,0,0), (1,1,1), (0,0,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, entonces

T queda bien definida.

Verifico q' cumpla $T^2=0$:

- $T(T(1,0,0)) = T(1,1,1) = (0,0,0)$ ✓
- $T(T(1,1,1)) = \underbrace{T(0,0,0) = (0,0,0)}_{\text{Por ser TL } T(0_v)=0_w}$ ✓
- $T(T(0,0,1)) = T(0,0,0) = (0,0,0)$ ✓

b) $T^2 = I$ pero $T \neq I$

es decir

$$T(T(v)) = v \quad \text{pero} \quad T(v) \neq v$$

Veo que $v \subseteq Im(T)$

Como Dom. tiene dim = 3, para q' se cumpla el teorema de la dimensión puedo pedir que:

- $\dim(Im(T)) = 3$
- $\dim(Nu(T)) = 0$

Entonces podría tomar arbitrariamente:

$$\begin{cases} T(1,0,0) = (0,1,0) \\ T(0,1,0) = (1,0,0) \\ T(0,0,1) = (0,0,1) \end{cases}$$

Vemos que $T(v) \neq v$ y que $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Verifico que $T(T(v))=v$:

- $T(T(1,0,0)) = T(0,1,0) = (1,0,0)$ ✓
- $T(T(0,1,0)) = T(1,0,0) = (0,1,0)$ ✓
- $T(T(0,0,1)) = T(0,0,1) = (0,0,1)$ ✓

c) $T^2 = T$ pero $T \in \{0, I\}$

es decir: $T(T(v)) = T(v)$, pero $T(v) \neq 0$ y $T(v) \neq I$

~~que~~

Por T. de la dim., puedo tomar $\dim(Im(T)) = 2$ y $\dim(Nu(T)) = 1$

Entonces podría tomar arbitrariamente:

$$\begin{cases} T(1,0,0) = (0,0,0) \\ T(0,1,1) = (0,1,1) \\ T(0,0,1) = (0,1,1) \end{cases}$$

que cumple lo pedido, veo que $T(v) \neq v$ y que $T(v) \neq 0$.
y la base es $\{(1,0,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$

Verifico si cumple $T(T(v)) = T(v)$:

- $T(T(\underbrace{1,0,0}_{v})) = T(0,0,0) \overset{\text{por TL}}{=} (0,0,0) = T(\underbrace{1,0,0}_{v})$ ✓
- $T(T(\underbrace{0,1,1}_{v})) = T(0,1,1) = (0,1,1) = T(\underbrace{0,1,1}_{v})$ ✓
- $T(T(\underbrace{0,0,1}_{v})) = T(0,1,1) = (0,1,1) = T(\underbrace{0,0,1}_{v})$ ✓

d) $T^3 = 0$, pero $T^2 \neq 0$.

es decir: $T(T(T(v))) = 0$ pero $T(T(v)) \neq 0$.

entonces $T(T(v)) \subseteq Nu(T) \to Im(T) \subseteq Nu(T)$

Por T. de la dim. puedo tomar que $\dim(Im(T)) = 2$ y $\dim(Nu(T)) = 1$ ya que $Dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Entonces, arbitrariamente puedo tomar:

$$\begin{cases} T(1,0,0) = (0,0,0) \\ T(0,1,0) = (1,0,0) \\ T(0,0,1) = (0,1,0) \end{cases}$$

Base de $\mathbb{R}^3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ canónica.

Verifico que $T(T(T(v))) = 0$.

- $T(T(T(1,0,0))) = T(T(0,0,0)) \overset{\text{por TL}}{=} T(0,0,0) \overset{\text{por TL}}{=} (0,0,0)$ ✓
- $T(T(T(0,1,0))) = T(T(1,0,0)) = T(0,0,0) \overset{\text{por TL}}{=} (0,0,0)$ ✓
- $T(T(T(0,0,1))) = T(T(0,1,0)) = T(1,0,0) = (0,0,0)$ ✓

Verifico que $T(T(v)) \neq 0$ (o sea que alguna de las tres composiciones me de distinto de 0).

- $T(T(1,0,0)) = T(0,0,0) = (0,0,0)$
- $T(T(0,1,0)) = T(1,0,0) = (0,0,0)$
- $T(T(0,0,1)) = T(0,1,0) = (1,0,0) \to$ ya hace que $T(T(v)) \neq 0$ ✓